HETEROSCEDASTICITY (Heteroskedastisitas)

-Sering terjadi dlm data “cross section”
misal: Hubungan pendapatan & pengeluaran RT, Perusahaan

-Biasanya tdk terjadi dlm data “ Time Series”

-Jika Var (ε_i) , E (ε_i^2)=σ_i^2, penduga koefisien OLS tetap tak bias dan konsisten, tapi tidak efisien, bahkan Var($\hat{\beta}$)$_{OLS}$ berbias

Dlm model linear sederhana:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{\sum x_i(\beta x_i + \varepsilon_i)}{\sum x_i^2}$$

$$E(\hat{\beta}) = \beta + \frac{E(\sum x_i \varepsilon_i)}{\sum x_i^2} \; ; \qquad \mathrm{Var}(\hat{\beta})_{OLS} = \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}$$

$$c_i = \frac{x_i}{\sum x_i^2} \rightarrow Var(\hat{\beta}) = \sum c_i^2 \sigma_i^2 = \frac{\sum x_i^2 \sigma_i^2}{(\sum x_i^2)^2} \stackrel{\wedge}{=} \sum c_i^2 \hat{e}_i^2 \; (White, 1980)$$

Tetapi tetap inefisien dibandingkan penduga tak bias berikut ini :

Mis. $\sigma_i^2 = \sigma^2 k_i$, k_i: konstanta yg tdk harus sama

$$Var(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2 \sum x_i^2 k_i}{\left(\sum x_i^2\right)^2} = \frac{\sigma^2}{\left(\sum x_i^2\right)} \frac{\sum x_i^2 k_i}{\left(\sum x_i^2\right)}$$

$Jika \ \frac{\sum x_i^2 k_i}{\left(\sum x_i^2\right)} > 1$ Maka $Var\left(\hat{\beta}\right)_{OLS}$ underestimate dan t_{hit} overestimate

<u>Mendeteksi Heteroskedastisitas</u>

- Metode grafik $(\hat{Y}, e_i^2)$ atau $(\mathrm{x}, \mathrm{e}^2)$ diplotkan.
- Uji Heteroskedastisitas :

  Ho : $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ... = \sigma_N^2$

  H1 : tergantung pendugaan yang dianggap akan menghasilkan koreksi heteroskedastisitas yang paling diinginkan.

1. UJI PARK (Econometrica, vol 34, No. 4, 1966)

   menganjurkan fungsi :

$$\sigma_i^2 = \sigma^2 x_i^{\beta} e^{vi} \rightarrow \beta \text{ signifikan ? masalah pola vi?}$$

$$Plot\, \sigma_i^2 \text{ dengan } \mathrm{e}_i^2$$

2. UJI GLEJSER (seperti uji Park)

Fungsi Linear $|e_i|$ terhadap : $x_i, \sqrt{x_i}, \frac{1}{x_i}, \frac{1}{\sqrt{x_i}}, \ldots$

3. UJI Korelasi Pangkat SPEARMAN (urutan e_i dan X_i)

$$r_s = 1 - 6\left[\frac{\sum d_i^2}{n(n^2 - 1)}\right] \rightarrow t = \frac{r_s\sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - r_s^2}} \approx t_{(n-2)}$$

4. UJI GOLDFELD-QUANDT (JASS, Vol 60, 1965) $\rightarrow H_1 : \sigma_i^2 = c x_i^2$

Cara : 1. Urutkan data peubah bebas x.

2. Keluarkan d pengamatan di tengah (jika tidak ada \`natural break\`) misal : d= $\frac{1}{5}N$

3. Hitung 2 model regresi terpisah tersebut, dengan

dbe=(N-d-2k)/2

4. Hitung JKS_1 dan JKS_2

5. Dengan asumsi masing-masing ε_i ~Normal, $\frac{JKS_2}{JKS_1} \approx F_{(dbe_1, dbe)}$

Note : - Jika k>2, urutkan pengamatan berdasarkan salah satu peubah bebasnya

- Supaya kuasa uji tinggi (salah jenis II lebih keci), harus dengan restriksi dimana kedua model regresi tersebut mempunyai parameter koefisien yang sama

5. UJI BREUSCH-PAGAN (Econometrica, Vol 47, 1979)

Misal Model : $Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$

dengan asumsi umum: $\sigma_i^2 = f(\gamma + \delta z_i)$

z dapat merupakan peubah bebas x atau suatu kelompok peubah bebas selain x.

> gunakan $\hat{\varepsilon}_i$ untuk menghitung $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum \hat{\varepsilon}_i^2}{N}$

> Lakukan Regresi: $\frac{\hat{\varepsilon}_i^2}{\hat{\sigma}_i^2} = \gamma + \delta z_i + v_i$

> Jika ε_i ~Normal, $\frac{JKR}{2} \approx \chi^2_{(p)}$ merupakan statistik uji yang cocok.

Jika nyata (heteroskedastisitas), koreksinya menggunakan peubah z

6. WHITE TEST (Econometrica, Vol. 48, 1980)

- Tidak perlu asumsi kenormalan seperti B-test.
- Dengan asumsi umum : $\hat{\varepsilon}_i^{\,2} = \gamma + \delta z_i + v_i,$

dengan R^2 sebagai ukuran `goodness of fit`.

Jika homoskedastisitas, $NR^2 \approx \chi^2_{(p)}$

Note : Misal $\sigma_i^2=\sigma^2 k_i$,, k_i : konstanta yang tidak harus sama.

$$Var(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2 \sum x_i^2 k_i}{(\sum x_i^2)^2} = \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2} \frac{\sum x_i^2 k_i}{\sum x_i^2}$$

jika $\dfrac{\sum x_i^2 k_i}{\sum x_i^2} > 1 \rightarrow \mathrm{Var}(\hat{\beta})_{OLS} \longrightarrow$ underestimate dan t overestimate

CARA MENGATASI (MENGOREKSI) HETEROSKEDASTISITAS

a) Jika σ^2 diketahui $\rightarrow$ *Weighted Least Squares* (MKT tertimbang); kasus khusus dari GLS, yg dpt diturunkan dari fungsi kemungkinan maximum.

Note : $$JKS = \sum \frac{1}{\sigma_i^{\,2}}(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}\, x_i)^2 = \sum \left(\frac{Y_i - \beta x_i}{\sigma_i}\right)^2$$

simpangan (pengamatan) ekstrim dpt timbangan kecil

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x_i y_i / \sigma_i^{\,2}}{\sum x_i^{\,2} / \sigma_i^{\,2}} = \frac{\sum x_i^* \, y_i^*}{\sum x_i^*} \qquad \text{dimana } x_i^* = \frac{x_i}{\sigma_i} \text{ dan } y_i^* = \frac{y_i}{\sigma_i}$$

Cara Transformasi Model: $Y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{2i} + \ldots + \beta_k x_{ki} + \varepsilon_i \quad \left| \text{ x } \frac{1}{\sigma_\text{i}} \right|$

$$\frac{Y_i}{\sigma_i} = \beta_1 \frac{1}{\sigma_i} + \beta_2 \frac{x_{2i}}{\sigma_i} + \ldots + \beta_k \frac{x_{ki}}{\sigma_i} + \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}$$

$$Y_i^* = \beta_1 x_1^* + \beta_2 x_{2i}^* + \ldots + \beta_k x_{ki}^* + \varepsilon_i^*$$

$$\rightarrow Var(\varepsilon_i^*) = \frac{1}{\sigma_i^{\,2}} Var(\varepsilon_i) = 1$$

b. Jika σ_i^2 tidak diketahui → sering menggunakan asumsi tentang σ_i^2

Misal Asumsi : **$Var(\varepsilon_i)=C\ X_{2i}^2$** → lakukan seperti di atas dengan transformasi: **x $(X_{2i})^{-1}$**

$$\frac{Y_i}{x_{2i}} = \beta_1 \frac{1}{x_{2i}} + \beta_2 + \beta_3 \frac{x_{3i}}{x_{2i}} + \ldots + \beta_k \frac{x_{ki}}{x_{2i}} + \frac{\varepsilon_i}{x_{2i}}$$

$$\rightarrow Var(\varepsilon_i *) = c$$

c. Dapat dengan Transformasi Log (memperkecil skala) → kadangkala dapat masalah baru, seperti *Spurious correlation,* kolinearitas.

<u>Teladan :</u> Dengan OLS : $\hat{Y}_i = 0.89 + 0.237x_i$; $R^2 = 0.93$; $F = 252.7$

(4.4) (15.9) ← statistik t

Dengan WLS :

$$\frac{Y_i}{x_i} = \beta^* + \alpha^* \frac{1}{x_i} + \varepsilon_i^*$$

$$\frac{\hat{Y}_i}{x_i} = 0.249 + 0.7529 \frac{1}{x_i} \; ; \; R^2 = 0.76 \; ; F = 58.7$$

(21.3) (7.7)

$R^2_{WLS} < R^2_{OLS}$ → jangan dianggap sebagai indikasi bahwa koreksi heteroskedastisitas kurang baik karena prosedur WLS melibatkan transformasi peubah tak bebas (Y*)

Dengan indikator :

$$\hat{\varepsilon}_i = Y_i - \underbrace{(0.7529 + 0.249X_i)}_{\hat{Y}_i} \rightarrow R^2 = 1 - \frac{JKS}{JKT} \rightarrow \text{tidak harus 0-1}$$

$$r_{Y_i \hat{Y}_i}$$