METODE GLS

Oleh

Bambang Juanda

Konsekuensi bagi Penduga OLS

Model yg dibahas tidak berubah, yaitu:

$$y_i = \underline{x}_i{}' \underline{\beta} + \varepsilon_i;\ i = 1, 2, .., n \qquad (9.1)$$

Matriks: $\underline{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\,\underline{\beta} + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ (9.2)

Asumsi Gauss-Markov (spy bersifat BLUE):

$$E(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \mid \mathbf{X}) = E(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \underline{\mathbf{0}} \qquad (9.3)$$

$$V(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \mid \mathbf{X}) = V(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \sigma^2\,\mathbf{I} \qquad (9.4)$$

Heteroskedastisitas: komponen sisaan yg berbeda punya ragam yg tidak sama, shg komponen diagonal dari matriks ragam-peragam tidak sama.

Autokorelasi: komponen non-diagonal dari matriks ragam-peragamnya tidak sama dgn nol lagi, artinya komponen sisaan yg berbeda berkorelasi.

Bentuk umum pelanggaran asumsi (9.4):

$$V\{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \mid \mathbf{X}\} = \sigma^{2}\,\boldsymbol{\Psi} \qquad (9.5)$$

Ψ: matrik definit positif, yg kadangkala diasumsikan diketahui (mis. tergantung dari **X**)

Untuk pembuktian ketakbiasan, hanya asumsi (9.3) yang digunakan. Jika pers (9.5) menggantikan asumsi (9.4) maka hasilnya tetap bhw penduga OLS **b** bersifat tak bias bagi $\underline{\beta}$. Akan tetapi ekspresi sederhana (3.22) tidak berlaku. Bentuk umum matriks ragam-peragam **b** :

$$V\{\underline{\mathbf{b}} \mid \mathbf{X}\} = V\{(\mathbf{X'X})^{-1}X'\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \mid \mathbf{X}\} = (\mathbf{X'X})^{-1}X'\,V\{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \mid \mathbf{X}\}\,X(\mathbf{X'X})^{-1}$$

$$= \sigma^{2}\,(\mathbf{X'X})^{-1}X'\,\boldsymbol{\Psi}\,X(\mathbf{X'X})^{-1} \qquad (9.6)$$

Pers (9.6) menjadi sederhana seperti (3.22) jika Ψ matriks identitas. Konsekuensinya, meskipun penduga OLS masih tak bias, tetapi ragam dan simpangan baku koefisiennya berdasarkan persamaan (9.4) yang salah, bukan berdasarkan persamaan (9.6) yang benar.

Konsekuensi: statistik uji-F & uji-t yg baku tidak berlaku & kesimpulannya dpt menyesatkan. Selain itu, pembuktian dalil Gauss-Markov bahwa penduga OLS bersifat BLUE juga tidak berlaku lagi karena penduga OLS tak bias tapi tidak terbaik lagi.

Dua cara utk menangani heteroskedastisitas & autokorelasi:

1. Menurunkan penduga alternatif yg bersifat tak bias, linear, dan terbaik. (misal dgn GLS)
2. Tetap penduga OLS tapi simpangan bakunya disesuaikan untuk memungkinkan sifat heteroskedastisitas dan/atau autokorelasi.

Sebenarnya ada cara ketiga utk menghilangkan masalah tersebut. Pertimbangannya dlm banyak kasus masalah heteroskedastisitas dan (terutama sekali) autokorelasi karena spesifikasi model yang diduga salah (*misspecified*). Jika kasusnya begini, pendeteksiannya diarahkan dgn mempertimbangkan kembali model yg spesifikasinya benar.

Penurunan Penduga Alternatif dgn GLS

- Penduga linear terbaik bagi $\underline{\beta}$ dgn asumsi matriks Ψ diketahui secara lengkap.
- Mentransformasi modelnya sedemikian rupa shg memenuhi asumsi Gauss-Markov

1. Mulai dgn $\mathbf{\Psi^{-1} = P'P}$ (9.7)

   P matriks segi non-singular (pangkat penuh), tidak khas.

2. Dari persamaan ini dpt dituliskan:

$$\mathbf{\Psi = (P'P)^{-1} = P^{-1}(P')^{-1}}$$

$$\mathbf{P\Psi P' = PP^{-1}(P')^{-1}P' = I}$$

$$E\{\mathbf{P\underline{\varepsilon}} \,|\mathbf{X}\} = P\, E\{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \,|\mathbf{X}\} = \underline{\mathbf{0}} \qquad (9.3^*)$$

$$V\{\mathbf{P\underline{\varepsilon}} \,|\mathbf{X}\} = \mathbf{P}\, V\{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \,|\mathbf{X}\}\, \mathbf{P'} = \sigma^2\, \mathbf{P\Psi P'} = \sigma^2\, \mathbf{I} \qquad (9.4^* \,\&\, 9.5^*)$$

$\rightarrow$ $\mathbf{P\underline{\varepsilon}}$ memenuhi syarat dalil Gauss-Markov.

3. Transformasi model dengan matriks **P** shg menjadi:

$$\mathbf{P}\underline{\mathbf{y}} = \mathbf{PX}\,\underline{\beta} + \mathbf{P}\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{atau} \quad \underline{\mathbf{y}}^* = \mathbf{X}^*\,\underline{\beta} + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \qquad (9.8)$$

Komponen $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^*$ memenuhi dalil Gauss-markov -> $\underline{\beta}$ BLUE dlm model awal (9.2) dgn asumsi (9.3) dan (9.5).

Penduga koefisiennya adalah sebagai berikut:

$$\underline{\beta} = (\mathbf{X}^{*\prime}\,\mathbf{X}^*)^{-1}\,\mathrm{X}^{*\prime}\,\underline{\mathbf{y}}^* = (\mathbf{X}'\,\mathbf{\Psi}^{-1}\,\mathbf{X})^{-1}\,\mathrm{X}'\,\mathbf{\Psi}^{-1}\,\underline{\mathbf{y}} \qquad (9.9)$$

Penduga GLS (*generalized least squares*), sederhana, spt pers (3.19) jika $\mathbf{\Psi}=\mathbf{I}$. Dpt ditunjukkan bbrp contoh kasus khusus yg lebih mudah diinterpretasi dari rumus umum (9.9) tsb.

- Dlm praktek biasanya $\mathbf{\Psi}$ tidak diketahui dan harus diduga dulu. Dengan menggunakan suatu dugaan $\mathbf{\Psi}$ dalam (9.9) akan menghasilkan penduga FGLS (*feasible generalized least squares*) bagi $\underline{\beta}$. Penduga FGLS kadangkala disebut juga penduga EGLS (*Estimated* GLS).

Penduga GLS ini sering menarik dari sisi teori. Keuntungan menurunkan metode GLS dgn cara mentransformasi ini adalah bahwa kita tidak harus menurunkan suatu matriks ragam-peragam baru atau dugaan baru bagi σ^2. Kita hanya menggunakan hasil-hasil dugaan metode OLS saja setelah peubah-peubah asli diganti dengan peubah-peubah hasil transformasi imbangannya. Misalnya, matriks ragam-peragam bagi $\underline{\beta}$:

$$V(\underline{\beta}) = \sigma^2 (\mathbf{X}^{*\prime} \mathbf{X}^*)^{-1} = \sigma^2 (\mathbf{X}' \mathbf{\Psi}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \qquad (9.10)$$

σ^2 dpt diduga dgn membagi JKS dgn jumlah pengamatan (n) dikurangi jumlah koefisien regresi (k), yaitu:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-k}\left(\underline{y}^* - X^* \underline{\hat{\beta}}\right)'\left(\underline{y}^* - X^* \underline{\hat{\beta}}\right) = \frac{1}{n-k}\left(\underline{y} - X\underline{\hat{\beta}}\right)' \Psi^{-1}\left(\underline{y} - X\underline{\hat{\beta}}\right) \qquad (9.11)$$

Contoh metode GLS kasus Heteroskedastisitas

- Kasus $V\{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \mid \mathbf{X}\}$ merupakan matriks diagonal tapi $\neq \sigma^2 \mathbf{I}$
- Tidak ada korelasi antar komponen sisaan, tapi ragam ε_i bervariasi diantara pengamatan-pengamatan.
- Misalnya y_i pengeluaran makanan dan $\underline{\mathbf{x}}_i'$ terdiri dari konstanta dan pendapatan yg siap dibelanjakan (DPI_i).
- Kasus heteroskedastisitas ini dpt dimodelkan sbb:

$$V\{\varepsilon_i \mid DPI_i\} = \sigma_i^2 = \sigma^2 \exp\{\alpha_2 DPI_i\} = \exp\{\alpha_1 + \alpha_2 DPI_i\} \qquad (9.12)$$

- Untuk nilai α_2 tertentu dan $\alpha_1 = \log \sigma^2$. Dgn $\mathbf{h_i}$ **diketahui**, bentuk heteroskedastisitas ini hanya mengasumsikan:

$$V\{\varepsilon_i \mid \mathbf{X}\} = V\{\varepsilon_i \mid x_i\} = \sigma^2 h_i^2 \qquad (9.13)$$

$$V\{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \mid \mathbf{X}\} = \sigma^2 \,\mathbf{Diag}\{h_i^2\} = \sigma^2 \boldsymbol{\Psi} \qquad (9.13a)$$

$$\text{asumsi } E\{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \mid \mathbf{X}\} = \underline{\mathbf{0}} \qquad (9.13b)$$

Mencari penduga BLUE bagi $\underline{\beta}$ dlm model:

- $y_i = \underline{x}_i' \, \underline{\beta} + \varepsilon_i$; untuk i = 1, 2, .., n (9.14)
- Gunakan persamaan matriks umum dari pers di atas. Dari struktur matriks **Ψ**, mudah dilihat bhw P yg cocok :
- $\mathbf{P} = \mathbf{Diag}\{h_i^{-1}\}$, (9.15)
- Penduga GLS bagi $\underline{\beta}$ dpt diperoleh dgn OLS dari model:

$$\mathbf{P}\underline{\mathbf{y}} = \mathbf{PX}\,\underline{\beta} + \mathbf{P}\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{atau} \quad \underline{\mathbf{y}}^* = \mathbf{X}^*\,\underline{\beta} + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^*$$

atau $$y_i^* = \underline{x}_i^{*\prime}\,\underline{\beta} + \varepsilon_i^* \qquad (9.16)$$

atau $$y_i/h_i = (1/h_i)\,\underline{x}_i'\,\underline{\beta} + \varepsilon_i/h_i \qquad (9.17)$$

- Sisaan dlm (9.17) ini homoskedastis. Penduga OLS nya:

$$\underline{\hat{\beta}} = \left(\sum_{i=1}^{n} h_i^{-2}\,\underline{x}_i\,\underline{x}_i'\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} h_i^{-2}\,\underline{x}_i\,\underline{y}\right) \qquad (9.18)$$

Ini Kasus khusus dari (9.9). Penduga GLS seperti ini sering disebut penduga WLS (*weighted least squares*).