Metode Kemungkinan Maksimum *(Maximum Likelihood Method)*

oleh

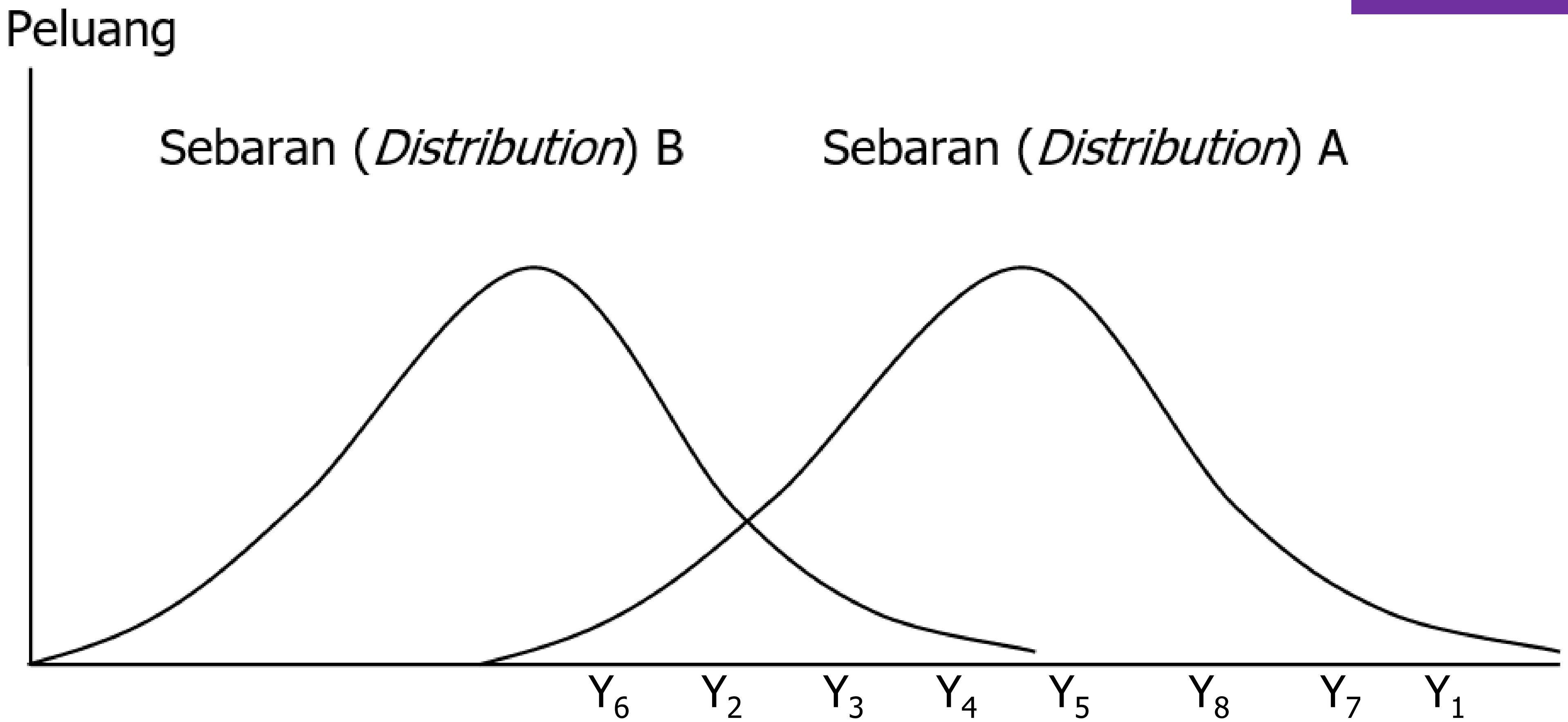
Bambang Juanda

Departemen Ilmu Ekonomi

Fakultas Ekonomi dan Manajemen IPB

https://bambangjuanda.com/

Pendugaan kemungkinan maksimum (ML: *maximum likelihood*) memfokuskan fakta bahwa **populasi-populasi** (yang dicirikan dengan parameternya) **berbeda** *membangkitkan contoh-contoh berbeda*; suatu contoh apapun yang sedang dikaji kemungkinan (peluang)nya lebih besar berasal dari beberapa populasi daripada dari populasi lainnya. Misalnya, jika seseorang melakukan *sampling* dengan pelemparan-pelemparan koin dan kemudian diperoleh rata-rata contoh 0.5 (merepresentasikan setengahnya keluar "Angka" dan setengahnya keluar "Gambar"), maka populasi paling mungkin dari mana contoh diambil adalah suatu populasi yang rata-ratanya ($\bar{x} = \hat{\mu} =$) 0.5



Misal suatu kasus, dimana suatu contoh (Y_1, Y_2, …, Y_8) diketahui diambil dari suatu populasi normal dengan ragam diketahui tapi nilai tengah tidak diketahui. Asumsikan bahwa pengamatan-pengamatan Populasi A atau B. Jika populasi (asal) sebenarnya dianggap dari B, maka peluang bahwa kita telah memperoleh contoh tersebut dari B sangat kecil. Akan tetapi jika populasi (asal) sebenarnya adalah A, maka peluang bahwa kita telah memperoleh contoh tersebut dari A sangat besar. Jadi, pengamatan-pengamatan ’memilih’ populasi A sebagai populasi asal yang paling mungkin telah membangkitkan data pengamatan tersebut.

Kita definisikan penduga ML dari suatu parameter β sebagai nilai $\hat{\beta}$ yang paling mungkin membangkitkan pengamatan-pengamatan contoh Y_1, Y_2, …, Y_n. Secara umum, jika Y_i menyebar normal, dan masing-masing nilai Y diambil secara bebas, maka penduga ML akan memaksimumkan nilai:

(pers 9.19) $$\ell(\underline{\beta}) = p(Y_1)\, p(Y_2) \ldots p(Y_n)$$

dimana $P(Y_i)$ merepresentasikan suatu peluang yang dikaitkan, misalnya, dengan *sebaran normal*. Jadi dugaan ML merupakan suatu fungsi dari contoh (*sample*) Y_i yang terambil, i=1,2,...,n. Suatu contoh yang berbeda dapat menghasilkan dugaan ML yang berbeda.

Persamaan (9.19) sering disebut sebagai **fungsi kemungkinan** (*likelihood function*). Fungsi kemungkinan ini tidak hanya tergantung dari nilai-nilai contoh Y_i tapi juga parameter $\underline{\beta}$ yang tidak diketahui (akan diduga). Dalam menggambarkan fungsi kemungkinan, kita sering berpikir bahwa parameter yang tidak diketahui (akan diduga) dapat bervariasi, sedangkan nilai Y_i tetap. Prosedur metode pendugaan ML adalah dengan mencari dugaan parameter yang paling mungkin membangkitkan data contoh tersebut, atau yang memaksimumkan fungsi kemungkinan (9.19).

Sebagai ilustrasi, misalnya kita ingin mencari dugaan ML mengenai parameter dari model: $Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$. Sebagaimana diketahui bahwa masing-masing Y_i menyebar normal dengan nilai tengah ($\alpha + \beta X_i$), dan ragam σ^2. Sebaran peluang dapat dituliskan secara eksplisit sebagai berikut:

$$p(Y_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} (Y_i - \alpha - \beta X_i)^2 \right] \qquad (9.20)$$

Oleh karena itu, fungsi peluang bersamanya (*likelihood function*) adalah

$$\ell\left(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \alpha, \beta, \sigma^2\right) = p(Y_1)\, p(Y_2) \ldots p(Y_n)$$

$$\ell(\underline{Y}, \underline{\beta}) = \ell(\underline{\beta}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} (Y_i - \alpha - \beta X_i)^2\right] \qquad (9.21)$$

Karena vektor pengamatan $\underline{Y}$ tetap maka **fungsi kemungkinan** (9.21) hanya merupakan fungsi dari vektor parameter $\underline{\beta}=(\alpha, \beta, \sigma^2)'$ yang tidak diketahui. Kita ingin mencari nilai α, β, dan σ^2 yang menghasilkan fungsi kemungkinan bernilai maksimum. Untuk ini, kita turunkan fungsi (9.21) terhadap masing-masing dari 3 parameter yang tidak diketahui tersebut, kemudian hasil turunannya disamakan dengan nol, dan dicari nilai dugaan dari tiga parameter tersebut.

Sebenarnya lebih mudah mencari turunan ini dengan terlebih dulu mentransformasi[5] persamaan (9.21) ke dalam bentuk logaritma (natural)nya, sehingga diperoleh **fungsi *log likelihood*** berikut:

$$L = \ln \ell(\underline{\beta}) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \alpha - \beta X_i)^2 \quad (9.22)$$

Turunan parsial (9.22) terhadap α, β, dan σ^2 menghasilkan:

$$\frac{\partial(L)}{\partial\alpha} = \frac{1}{\sigma^2}\sum(Y_i - \alpha - \beta X_i) = 0 \quad (9.23)$$

$$\frac{\partial(L)}{\partial\beta} = \frac{1}{\sigma^2}\sum[X_i(Y_i - \alpha - \beta X_i)] = 0 \quad (9.24)$$

$$\frac{\partial(L)}{\partial\sigma^2} = \frac{-n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum(Y_i - \alpha - \beta X_i)^2 = 0 \quad (9.25)$$

Solusi persamaan (9.23) sampai (9.25) menghasilkan penduga kemungkinan maksimum (*maximum-likelihood estimator*) sebagai berikut:

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X} \qquad \hat{\beta} = \frac{\sum(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum(X_i - \bar{X})^2} \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i)^2}{n} \quad (9.26)$$

Transformasi monoton, dengan pengertian jika $\ell_1 < \ell_2$ maka $L_1 < L_2$ karena nilai ℓ selalu nonnegatif

Solusi persamaan (9.23) sampai (9.25) menghasilkan penduga kemungkinan maksimum (*maximum-likelihood estimator*) sebagai berikut:

$$\hat{\alpha}=\bar{Y}-\hat{\beta}\bar{X} \qquad \hat{\beta}=\frac{\sum(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{\sum(X_i-\bar{X})^2} \qquad \hat{\sigma}^2=\frac{\sum(Y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}X_i)^2}{n} \qquad (9.26)$$

Jelaslah bahwa nilai dugaan α dan β dengan metode ML (9.26) sama dengan nilai dugaan dengan metode OLS (2.28). Oleh karena itu kedua metode ini menghasilkan **penduga α dan β yang bersifat BLUE** (*best linear unbiased estimators*). Akan tetapi nilai **dugaan σ^2 dengan metode ML bersifat bias meskipun konsisten**, tidak sama dengan nilai dugaan σ^2 dengan metode OLS (2.9). Sebagai ilustrasi prosedur metode ML untuk kasus lainnya, dapat dilihat dalam Bab 10.